# 雑感　微分法の問題とその採点結果

■　数学Ⅲの微分法の範囲で，定期考査のある問題を作った．ねらいは「関数の最大・最小で，場合分けのあるもの」とし，誘導の段階で，微分法の他の利用も取り上げることとした．

■　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ を素材とし，閉区間 $t \leqq x \leqq t+2$ ( $t>0$ ) における最小値を場合分けして求めさせるものとした．そのとき，$f(t)=f(t+2)$ となる $t$ の値が必要となるが，$a^b=b^a$ となる自然数の組として，$2^4=4^2$ があることを利用させることとした．

■　逆順になるが，そのために当然 $f(x)$ のグラフを描かせる．ただ，問題になるのが極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ なので，この結果を与えたりせず，不等式を誘導してその結果を用いさせるという流れを作ることとした．

■　完成した問題は，次の通りである．

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ として，以下の問いに答えよ．

(1)　$x>e$ のとき，不等式 $1<\log x<\sqrt{x}$ が成り立つことを証明し，それを用いて $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフを描け（ただし，凹凸までは調べなくて良い）．

(3)　$t>0$ とするとき，閉区間 $t \leqq x \leqq t+2$ における $f(x)$ の最小値を $m$ とする．$2^4=4^2$ であることを用いて，$m$ を求めよ．

考査では，前の小問ができなかったために後半全滅するという問題が少なくなく，採点で苦慮するところだが，ここでは，(1)の後半は前半ができなくても解けるし，(2)は(1)ができなくても一応解けるように配慮してある．

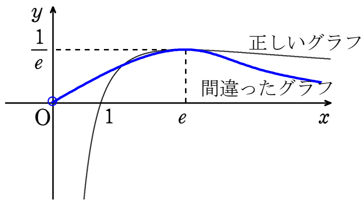
■　(1)では，「平均値の定理の利用」を考えた者が少なくないが，当然自滅である．授業の段階でこの定理の重要性やその応用として不等式の証明を取り上げているため，ここぞとばかりにそれを使おうとしたのだろう．

しかし，微分法で不等式の証明と言ったら，主流は差を取った関数の増減を調べると言うことにあり，平均値の定理の利用は特殊な形に限定される．そのあたりの理解が不十分だと言うことである．

$f(x)=\sqrt{x}-\log x$ は $x=4$ で最小値 $2-\log 4=2(1-\log 2)$ をとるが，この値が正であることをきちんと示せたものは，残念ながら多くない．また，$f''(x)$ まで求め，これが正であると言って単調性の話に持っていこうとした答案もあるが，間違いである．$f''(x)$ は $x=16$ で符号変化する．

証明が正しくできなくても，不等式から $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<f(x)<\dfrac{1}{x}$ を導き，はさみうちの原理を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を示せる．実際には，結論だけ書いたものや，$\log x$ と $x$ の $x\to\infty$ のときの増加の「レベル」の差のような知識から 0 と答えたものなどがあったが，不等式を「用いて」という指示に従っていないのでダメである．

■　(2)で，定義域を押さえ切れていないという者も，若干だがいた．論外である．採点してみて分かったことだが，この問題の最大のポイントは，実は極限にあった．$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ はともかく（(1)の後半ができていなくとも，増減表から減少だから $x\to\infty$ のとき，$f(x)\to 0$ だろう感覚が多い），$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ が分からないのだ．不定形でも何でもないが，$\dfrac{-\infty}{+0}$ が $-\infty$ となることが分からず，右の青線のようなグラフが少なからずあったのである．




こういった極限が苦手だと言うことは，授業の演習などでそれなりに承知していたので，随所で指導してきたつもりだったが，まだ不十分であった．

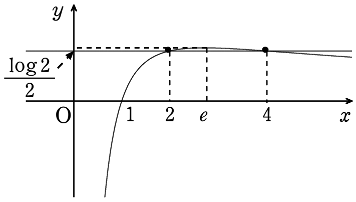
ただ，$y=0$ となる $x$ の値を $\log x=0$ から $x=1$ と求めておけば，このような間違いは防げたはずで，座標軸との共有点を求めることについては指導してきたつもりだが，指導の不十分さも痛感した次第である．

■　(3)において，ヒントとした $2^4=4^2$ から $4\log 2=2\log 4$ として $f(2)=f(4)$ を見抜けた者は，残念なことに若干名しかいない．

$f(t)=f(t+2)$ となる $t$ の値の必要性が分かっても，ここから $\dfrac{\log t}{t}=\dfrac{\log(t+2)}{t+2}$ より $t^{t+2}=(t+2)^t$ として，$2^4=4^2$ と見比べ，$t=2$ とした者が少なからずいる．

これは，$t^{t+2}=(t+2)^t$ を満たす $t$ の値が 2 以外に存在しないと言うことを示さなければ，不十分である．

ここで重要になるのは「グラフの利用」である．$f(2)=f(4)$ であって，$y=\dfrac{\log 2}{2}$ のグラフを重ねて描けば，$f(t)=f(t+2)$ となる $t$ の値は 2 しかないことがグラフから容易に了解される．




これを用いて，

(i)　$0<t<2$ のとき

$m=f(t)=\dfrac{\log t}{t}$

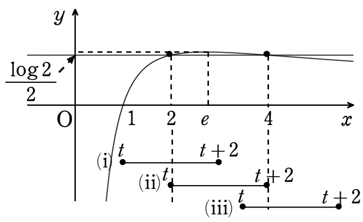
(ii)　$t=2$ のとき

$m=f(2)=f(4)$

$=\dfrac{\log 2}{2}$

(iii)　$2<t$ のとき　$m=f(t+2)=\dfrac{\log(t+2)}{t+2}$

となる．




誤答として目立ったものに，区間の中点 $t+1$ と $e$ の大小で場合分けをしたものがあった．これは，2 次関数感覚で，極大となる $x=e$ でグラフが左右対称となると思った（か，思わなくても 2 次関数のアナロジーとして機械的に処理した）ためであろう．

■　出来の悪さを露呈することになったが，採点を通じて，指導の不十分な点や生徒の理解の不十分な点などが，今更ながら明瞭になった．

問題としては，不等式の証明，はさみうちの原理，極限，グラフ，最小値など微分法の様々な内容を問うことのできる総合的な問題として，良問だと考えるが，いかがであろうか．

2015 年 12 月 3 日